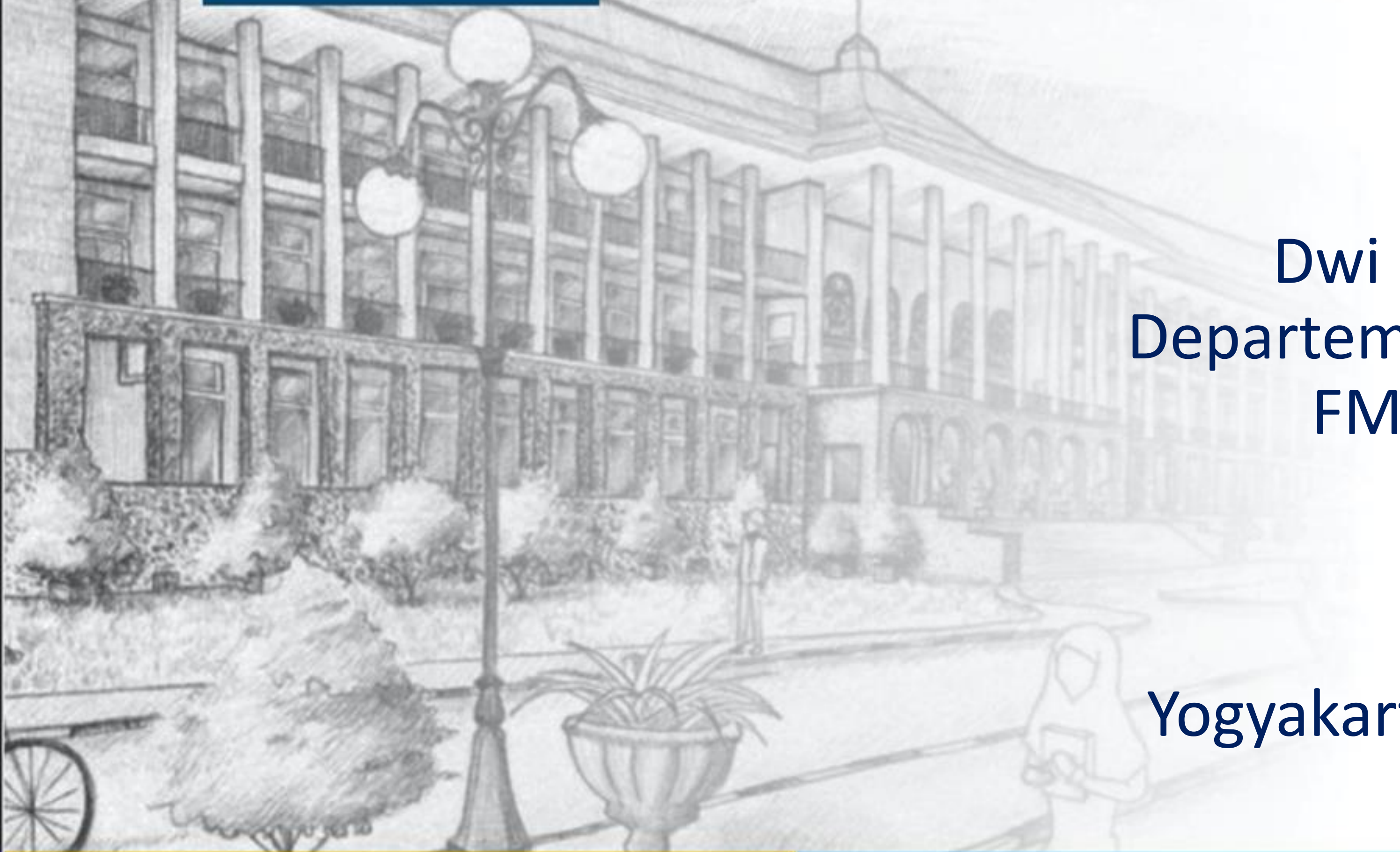
UNIVERSITAS
GADJAH MADA



Pengabdian kepada Masyarakat
HOTS dan *Problem Solving Strategies*
“Bidang Aljabar”

Dwi Ertiningsih
Departemen Matematika
FMIPA UGM

Yogyakarta, 23 Juli 2020

Pengenalan Aplikasi Matematika

Mathematics is everywhere!

Antrian di BANK

Antrian Lalu Lintas

Antrian di Kantor Pos

Masalah Lalu Lintas

Masalah Lalu Lintas

BAHASAN:
Masalah Antrian di Kantor Pos

Outline

- Perumusan Masalah
- Model Matematika: Antrian di Kantor Pos
- Sistem Antrian dengan 1 server (M/M/1)
- Sistem Antrian dengan 2 server (M/M/2)
- **Aplikasi di bidang Aljabar: SPL dan Matriks**

Perumusan Masalah: Model antrian di Kantor Pos

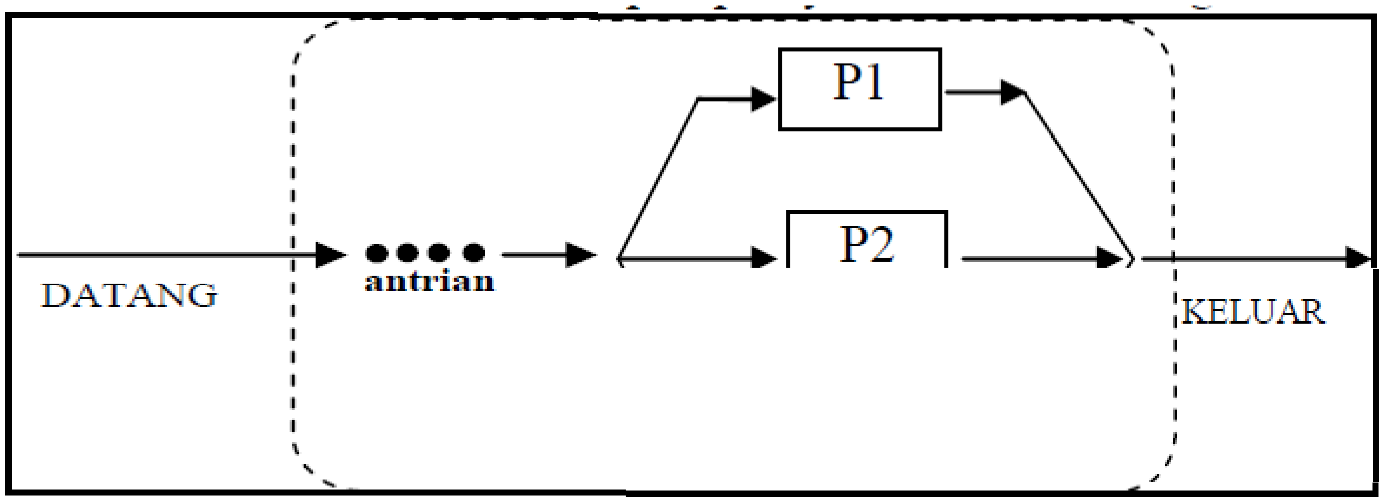
Salah satu lembaga penyedia pelayanan jasa yang tidak dapat dipisahkan dari masalah antrian adalah Kantor Pos. Masalah ini terlihat pada antrian pelanggan yang menunggu dilayani di depan loket pelayanan. Untuk mengoptimalkan kinerja pelayanan pada loket pelayanan, digunakan teori antrian untuk mengetahui dan menganalisa model antrian yang cocok untuk diterapkan.

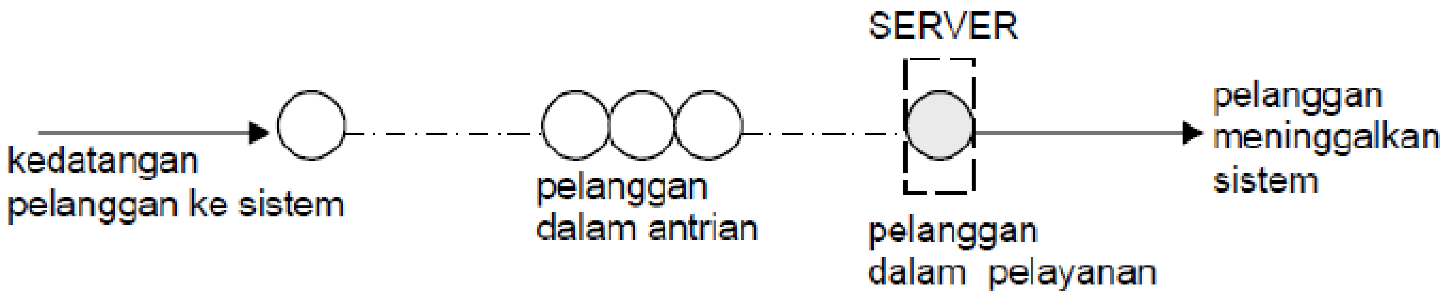
1. Bagaimanakah model antrian yang diterapkan pada loket pelayanan ?
2. Bagaimanakah mengoptimalkan waktu pelayanan pada loket pelayanan ?

Bagaimana merancang sistem pelayanan sehingga waktu tunggu konsumen di antrian berkurang

Batasan Masalah:

Sistem Antrian dengan 1 server dan 2 server





Model Antrian di Kantor Pos

Kantor Pos **mempunyai 2 loket pelayanan**.

1. Loket A : melayani transaksi keuangan
2. Loket B : melayani transaksi pengiriman surat/barang

Misalkan:

- Waktu antar kedatangan pelanggan di loket A berdistribusi Eksponensial dengan laju 15 pelanggan/jam.
- Waktu antar kedatangan pelanggan di loket B berdistribusi Eksponensial dengan laju 18 pelanggan/jam.
- Waktu pelayanan di masing-masing loket berdsitribusi Eksponensial dengan laju 3 menit/orang.

Sistem Antrian dengan 1 server (M/M/1)

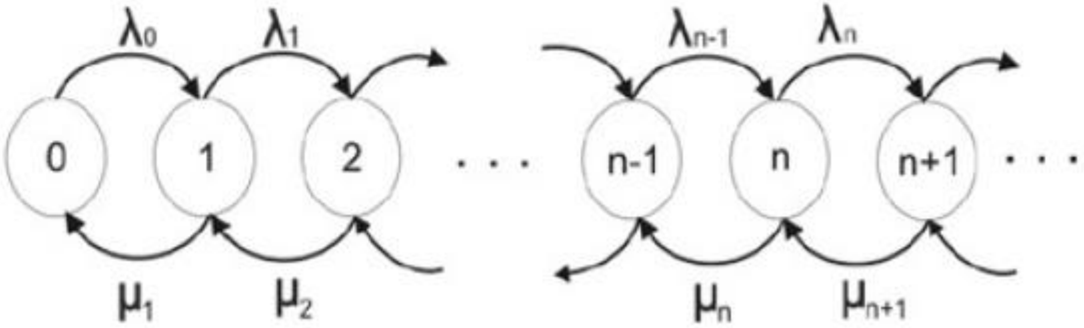
Asumsi:

- Waktu antar kedatangan dan pelayanan berdistribusi Eksponensial dengan laju $\lambda_n = \lambda$ dan $\mu_n = \mu$
- Faktor utilisasi $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$
- Banyaknya server = 1
- State = banyaknya pelanggan dalam sistem,

  sehingga state space = {0,1,2,…}

Sistem Antrian dengan 1 server (M/M/1)

- State space = {0,1,2,…} dengan $\lambda_n = \lambda$ dan $\mu_n = \mu$ (homogen)



- **Matriks Transisi (homogen)**

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Sistem Antrian dengan 1 server (M/M/1)

- Matriks Transisi

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

- Steady state $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \ldots)$
- **Sistem Persamaan Linear**

$$\pi . Q = 0 \textit{ (balance equation)}$$

Sistem Antrian dengan 1 server (M/M/1)

- Steady state

❖ π_0 = 1 - ρ

❖ $\pi_1 = \rho(1 - \rho)$

❖ π_n = $\rho^n(1 - \rho)$, untuk n $\geq$ 2.

Sistem Antrian dengan 2 server (M/M/2)

Asumsi:

- Waktu antar kedatangan dan pelayanan berdistribusi Eksponensial dengan laju λ dan μ
- Banyaknya server m = 2
- Faktor utilisasi $\rho = \frac{\lambda}{2\mu}$
- State = banyaknya pelanggan dalam sistem,

  sehingga state space = {0,1,2,…}

Model Antrian di Kantor Pos

Untuk mengurangi penumpukan pelanggan di antrian,

Manager akan menerapkan **kebijakan baru** yaitu:

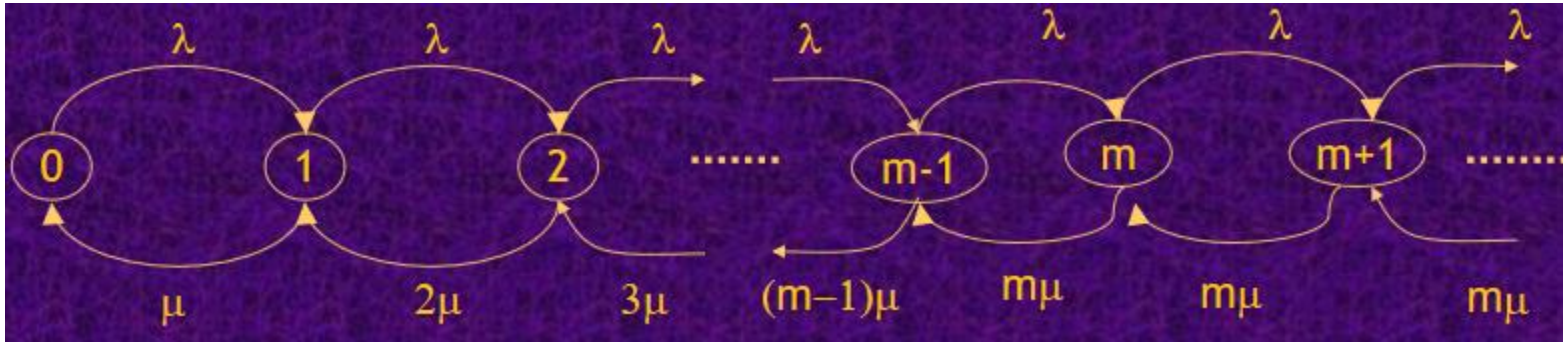
setiap loket dapat melayani dua transaksi (keuangan dan pengiriman surat/barang).

Bagaimana efek dari sistem baru terhadap

- ❑Rerata jumlah pelanggan dalam sistem antrian
- ❑Rerata waktu yang dihabiskan pelanggan di antrian.

Sistem Antrian dengan 2 server (M/M/2)

- **State space** = {0,1,2,...}



- **Matriks Transisi (homogen)**

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Sistem Antrian dengan 1 server (M/M/2)

- **Matriks Transisi**

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

- **Steady state** $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots)$
- **Sistem Persamaan Linear**

$$\pi . Q = 0 \text{ (balance equation)}$$

Sistem Antrian dengan 2 server (M/M/2)

- **Steady state**

❖ $\pi_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{2!} \frac{1}{1-\rho} \right\}^{-1}$

❖ $\pi_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \pi_0$

❖ $\pi_n = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{2!} \rho^{n-2} \pi_0, \quad \text{untuk n} \geq 2.$

Little's formula: $W_q = \dfrac{L_q}{\lambda};\ W = W_q + \dfrac{1}{\mu};\ L = \lambda W.$

UNIVERSITAS GADJAH MADA

M/M/1

$$L_q = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\pi_n = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)};$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$$

$$L = \lambda W = \frac{\rho}{1-\rho}$$

M/M/s

$$L_q = \sum_{n=s}^{\infty}(n-s)\pi_n$$

$$= \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \cdot \left\{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot \frac{1}{1-\rho}\right\}^{-1}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu};$$

$$L = \lambda W.$$

Sistem Antrian di Kantor Pos (M/M/1)

❑ M/M/1 Loket A

$\lambda = 15$

μ = 3 menit/pelanggan = 20 pelanggan/jam

$\rho = \lambda / \mu = 3/4 = 0.75$

Rerata jumlah pelanggan di loket A = L = $\frac{\rho}{1-\rho}$ = 3 pelanggan

Rerata waktu yang dihabiskan pelanggan = W = 0.2 jam = 12 menit

❑ M/M/1 Loket B

$\lambda = 18$, μ = 3 menit/pelanggan = 20 pelanggan/jam

$\rho = \lambda / \mu = 9/10 = 0.9$

Rerata jumlah pelanggan di loket B = L = $\frac{\rho}{1-\rho}$ = 9 pelanggan

Rerata waktu yang dihabiskan pelanggan = W = 0.5 jam = 30 menit

Jadi, **rerata jumlah pelanggan di dalam sistem antrian** adalah = 3 + 9 = 12 pelanggan.

Sistem Antrian di Kantor Pos (M/M/2)

❑ M/M/2

λ = 15 + 18 = 33

μ = 3 menit/pelanggan = 20 pelanggan/jam

ρ = λ/ 2μ = 33/40 = 0.825

$$\pi_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{2!} \frac{1}{1-\rho} \right\}^{-1} = 0.0959$$

L_q= 3.516 pelanggan

W_q= 0.107 jam = 6.42 menit

W = 0.517 jam = 31.02 menit

L = 5.166 pelanggan

HOTS dan *Problem Solving Strategies* Bidang Aljabar

I. ***Algebraic Identities***
II. ***Unique Factorization of Polynomials***
III. ***The Identity Theorem***

I. Algebraic Identities

Untuk manipulasi persamaan ke dalam bentuk yang lebih mudah dipahami.

Formula Faktorisasi

Ingat :

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = (a+b+c)^2$$

(*) $$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Misal $n \in \mathbb{Z}^+$ ganjil, jika b diganti dengan $-b$

(*) menjadi

$$a^n - (-b)^n = (a-(-b))\left(a^{n-1} + a^{n-2}(-b) + \cdots + a(-b)^{n-2} + (-b)^{n-1}\right)$$

(*)

$$\Leftrightarrow a^n + b^n = (a+b)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

QN: b diganti dengan $-b$ untuk $n \in \mathbb{Z}^+$ genap?

Dari (*)

QN : Misal b diganti dengan $-b$ untuk $n \in \mathbb{Z}^+$ genap ?

Dari (*) diperoleh

selalu minus

$$a^n - b^n = (a+b)\underbrace{\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} - b^{n-1}\right)}_{\text{Terdapat } n \text{ suku dengan tanda } (+)(-) \text{ selang-seling}} \quad (*)$$

$\downarrow$ n genap

tanda pada b^{n-1} selalu minus.

Jika b diganti dengan $-b$ pada (*), maka

$$(*) = (*)$$

NOTE :

(*) berlaku untuk $n \in \mathbb{Z}^+$ (genap dan ganjil)

(*) berlaku untuk $n \in \mathbb{Z}^+$ ganjil

LOCALLY ROOTED, GLOBALLY RESPECTED

Contoh 1

Tunjukkan bahwa $n^4 - 20n^2 + 4$ adalah bilangan komposit, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Tunjukkan bahwa $n^4 - 20n^2 + 4$ adalah bilangan komposit, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Proof

Bilangan komposit :

bilangan asli > 1 dan bukan prima

faktor : 1 dan bil tsb

Contoh : 4, 6, 8, 9, 10, dst

Ide : faktorisasi $a^m - b^m$

$n^4 - 20n^2 + 4$

2×10

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Trial I : ambil $a = n^2$, $b = 10$

$$n^4 - 20n^2 + 4 = (n^4 - 20n^2 + 100) - 96$$
$$= (n^2 - 10)^2 - 96$$

bukan kuadrat sempurna

Trial II : $n^4 - 20n^2 + 4$

$4n^2$ 2×2

$$n^4 - 20n^2 + 4 = \underbrace{(n^4 - 4n^2 + 4)}_{a^m} - \underbrace{16n^2}_{b^m}$$

ok!

$$n^4 - 20n^2 + 4 = (n^2 - 2)^2 - (4n)^2$$

$$= \underbrace{(n^2 - 2 - 4n)(n^2 - 2 + 4n)}_{\text{Show: both isn't equal } \pm 1}$$

Kasus 1

Andaikan $n^2 - 2 - 4n = 1 \Longleftrightarrow n^2 - 4n - 3 = 0$

$\Longleftrightarrow n = \dfrac{4 \pm \sqrt{28}}{2}$

$\Longleftrightarrow n = 2 \pm \sqrt{7}$

bukan integer

$\therefore$ Pengandaian salah, i.e.

Jika n integer, maka $n^2 - 2 - 4n \neq 1$.

3 kasus yang lain dapat ditunjukkan dengan cara yang sama. $\blacksquare$

Contoh 2

Tentukan semua penyelesaian real dari sistem berikut:

$$\left.\begin{aligned} &\text{(i)} \quad x + y + z = w \\ &\text{(ii)} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{w}. \end{aligned}\right\} (*)$$

UNIVERSITAS GADJAH MADA

Tentukan semua penyelesaian real dari sistem berikut:

$$\left.\begin{aligned} &\text{(i)} \quad x+y+z=w \\ &\text{(ii)} \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{w}. \end{aligned}\right\} \circledast$$

Solution :

Conjecture → salah satu dari x, y, z bernilai sama dengan w dan 2 yang lain bernilai negatif dari bilangan satunya.

Misal $\underbrace{x=w, \quad y=-z}_{\text{Check } \circledast \text{ memenuhi}}$

QN: Bagaimana menunjukkan tidak ada penyelesaian yang lain?

Dari (ii) diperoleh:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{w} \iff \frac{yz+xz+xy}{xyz}=\frac{1}{w}$$

$$\iff w(yz+xz+xy)=xyz$$

$$\Big\downarrow \text{(i)}$$

$$\iff (x+y+z)(yz+xz+xy)=xyz$$

$$\iff xyz+x^2z+x^2y+y^2z+xyz+xy^2+yz^2+xz^2+\cancel{xyz}=\cancel{xyz}$$

$$x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y + 2xyz = 0$$

$$\Leftrightarrow x(xy + xz + z^2 + yz) +$$

$$y(xy + yz + z^2 + xz) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(xy + yz + xz + z^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)\left[x(y+z) + z(y+z)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(x+z)(y+z) = 0$$

$$\Leftrightarrow x+y=0 \quad \vee \quad x+z=0 \quad \vee \quad y+z=0$$

$\Leftrightarrow (x+y)(x+z)(y+z) = 0$

$\Leftrightarrow x+y=0 \;\vee\; x+z=0 \;\vee\; y+z=0$

•) Missal $x+y=0 \Leftrightarrow x=-y$

maka $z = z+(x+y) \overset{(i)}{=} w$

Untuk $x+z=0$ dan $y+z=0$ dapat ditunjukkan dengan cara yang sama. $\blacksquare$

Contoh 3

Tunjukkan bahwa tidak ada bilangan prima pada barisan tak hingga bilangan bulat berikut

$$10001,\ 100010001,\ 1000100010001,\ \ldots \quad (*)$$

Contoh 3

Tunjukkan bahwa tidak ada bilangan prima pada barisan tak hingga bilangan bulat berikut

$$10001, 100010001, 1000100010001, \dots \quad (*)$$

Proof HINT : bukan bil. prima → bil. komposit

(*) dapat dituliskan dalam bentuk :

$$1+10^4, 1+10^4+10^8, \dots, 1+10^4+10^8+\dots+10^{4n}, \dots$$

Lebih umum,

$$1+x^4, 1+x^4+x^8, \dots, \underline{\underline{1+x^4+x^8+\dots+x^{4n}}}, \dots \quad (i)$$

untuk sebarang bil. bulat x, $x > 1$.

Terdapat 2 kasus (n genap atau n ganjil)

I. n ganjil, $n = 2m+1$

$\downarrow$ (i)

Misal

$$z = 1 + x^4 + x^8 + x^{12} + x^{16} + \dots + x^{8m} + x^{4(2m+1)}$$

$$z = (1+x^4) + x^8(1+x^4) + x^{16}(1+x^4) + \dots + x^{8m}(1+x^4)$$

$$z = (1+x^4)\left[1 + x^8 + x^{16} + \dots + x^{8m}\right]$$

$z = (1+x^4)(1+x^8+\cdots+x^{8m})$

- untuk $m>0 \longrightarrow 1+x^4>1$

$$\underbrace{1+\cdots+x^{8m}>1}$$

$\downarrow$

z adalah bil. komposit

- untuk $\underbrace{m=0}$

$\downarrow$

$z = \underbrace{1+x^4+\cdots+x^{4n}}$, $n = 2\underset{\overset{\|}{0}}{m}+1=1$

$\downarrow$

$\underbrace{z = 1+x^4 = 1001 \longrightarrow x=10}$

$\downarrow$

$z = 1001 = 73 \times 137$ bil. komposit.

Jadi, untuk n ganjil diperoleh z adalah bilangan komposit.

UNIVERSITAS GADJAH MADA

II. n genap , $n = 2m$

$\downarrow$ (I)

Misal

$$z = 1 + \overset{4.1}{x^4} + \overset{4.2}{x^8} + \dots + \overset{4.2m}{x^{4(2m)}}$$

Ingat :

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Ambil $a = 1$ dan $b = x^4$

$$z = 1 + x^4 + x^8 + x^{4(2m)} = \frac{1-(x^4)^{2m+1}}{1-x^4}$$

Ambil $a = 1$ dan $b = x^4$

$$z = 1 + x^4 + x^8 + x^{4(2m)} = \frac{1 - (x^4)^{2m+1}}{1 - x^4}$$

$$z = \frac{1 - (x^4)^{2m+1}}{1 - x^4}$$

$$= \frac{\left[1 - (x^{2m+1})^2\right]\left[1 + (x^{2m+1})^2\right]}{(1 - x^2)\qquad (1 + x^2)}$$

$$= (\underbrace{1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + (x^2)^{2m}}_{>1}).$$

$$(\underbrace{1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (x^2)^{2m}}_{>1})$$

$\therefore$ z adalah bilangan komposit. ∎

II. Polinomial derajat *n*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

•) Polinomial F membagi habis G jika terdapat polinomial Q s.t. $G = QF$

•) Polinomial H adalah gcd (greatest common divisor) dari polinomial F dan G j.h.j.

(1) H membagi habis F dan G

(2) jika K adalah polinomial yang juga membagi habis F dan G, maka K membagi habis H.

Division Algorithm

Diberikan polinomial $F(x)$ dan $G(x)$.

- $\exists$ polinomial $Q(x)$ dan $R(x)$ s.t.

$$F(x) = Q(x) . G(x) + R(x),$$

dengan $R(x) = 0$ atau

$$\deg R(x) < \deg G(x)$$

- $\exists$ polinomial S dan T s.t.

$$\gcd(F . g) = SF + TG.$$

Jika $\gcd(F . g) = 1$, maka F dan G relatif prima.

Contoh 4

Tentukan polinomial $p(x)$ s.t.

(i) $p(x)$ habis dibagi x^2+1

(ii) $p(x)+1$ habis dibagi x^3+x^2+1.

Contoh 4

Tentukan polinomial $p(x)$ s.t.

(i) $p(x)$ habis dibagi x^2+1

(ii) $p(x)+1$ habis dibagi x^3+x^2+1.

Solution

Dari (i), $\exists$ polinomial $S(x)$ s.t.

$$p(x) = (x^2+1)\, S(x).$$

Dari (ii), $\exists$ polinomial $T(x)$ s.t.

$$p(x)+1 = (x^3+x^2+1)\, T(x).$$

$$p(x) = (x^2+1)\, S(x) = (x^3+x^2+1)\, T(x) - 1$$

$$P(x) = (x^2+1)\,S(x) = (x^3+x^2+1)\,T(x) - 1$$

$$\Leftrightarrow (x^3+x^2+1)\,T(x) - (x^2+1)\,S(x) = 1$$

(*)

gcd dari

x^2+1 dan x^3+x^2+1

$\therefore$ x^2+1 dan x^3+x^2+1 relatif prima.

LOCALLY ROOTED, GLOBALLY RESPECTED

UNIVERSITAS GADJAH MADA

x^2+1 dan x^3+x^2+1 relatif prima

$$x^3+x^2+1 = (x+1)(x^2+1) + (-x)$$

$$x^2+1 = -x(-x) + 1$$

working backwards

$$\begin{aligned}1 &= x^2+1 + x(-x)\\ &= x^2+1 + x\left[(x^3+x^2+1) - (x+1)(x^2+1)\right]\\ &= (x^2+1)(1-x(x+1)) + x(x^3+x^2+1)\end{aligned}$$

$$1 = x^2+1 + x(-x)$$

$$= x^2+1 + x\left[(x^3+x^2+1) - (x+1)(x^2+1)\right]$$

$$= (x^2+1)(1-x(x+1)) + x(x^3+x^2+1)$$

$$\downarrow (*)$$

$$= (x^3+x^2+1)\underbrace{x}_{T(x)} - (x^2+1)\underbrace{(x^2+x-1)}_{S(x)}$$

Jadi, $P(x) = (x^2+1)\,S(x)$

$$= (x^2+1)(x^2+x-1) \qquad \blacksquare$$

Teorema Faktor

Diberikan polinomial $F(x)$.

Bilangan a dikatakan akar dari $F(x) = 0$ j.h.j. $(x-a)$ adalah faktor dari $F(x)$.

$$F(x) = (x-a)^m \, G(x),$$

dengan $G(a) \neq 0$.

Contoh 5

Diberikan polinomial $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$

dan $\exists$ 4 bil. bulat berbeda a, b, c, d s.t.

$$f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = 5.$$

Tunjukkan bahwa tidak ada bil. bulat k

s.t. $f(k) = 8$.

Proof

Misalkan $\underbrace{G(x) = F(x) - 5.}$

$\downarrow$

$$\underbrace{\begin{aligned} G(a) &= F(a) - 5 = 0 \\ G(b) &= F(b) - 5 = 0 \\ G(c) &= F(c) - 5 = 0 \\ G(d) &= F(d) - 5 = 0 \end{aligned}}$$

$\downarrow$

$\therefore$ a, b, c, d adalah akar² dari $G(x)$

$\downarrow$ Teorema faktor

$(x-a), (x-b), (x-c), (x-d)$: faktor² dari $G(x)$

i.e.

$$G(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\,H(x)$$

$G(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\,H(x)$

Andaikan terdapat bil. bulat k s.t. $F(k) = 8$

maka

$G(k) = F(k) - 5 = 8 - 5 = 3$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(k-a)(k-b)(k-c)(k-d)\,H(k)}_{} = 3$$

•) perkalian 5 bil. bulat

•) a, b, c, d berbeda

↓

(k-a), (k-b), (k-c), (k-d) berbeda

Paling banyak satu dari bil. (k-a), (k-b), (k-c), (k-d) sama dengan ±3.

Yang lain ±1

$(k-a), (k-b), (k-c), (k-d)$ berbeda

Paling banyak satu dari bil. $(k-a), (k-b),$
$(k-c), (k-d)$ sama dengan ± 3

Yang lain ± 1

Tidak mungkin

tidak ada bil bulat k s.t. $f(k) = 8$ $\blacksquare$

III. Teorema Identitas

- Misalkan P polinomial tak nol derajat n.

  Jika a adalah akar dari $P(x) = 0$, maka terdapat polinomial Q derajat $n-1$ s.t.

  $$P(x) = (x-a)\,Q(x).$$

  $\downarrow$

  P mempunyai paling banyak n akar

Teorema Identitas

Diberikan dua polinomial derajat $\leq n$. Jika kedua polinomial bernilai sama untuk lebih dari n nilai berbeda, maka kedua polinomial IDENTIK

Contoh 6

Tentukan semua polinomial $P(x)$ s.t.

$$P(x^2+1) = (P(x))^2 + 1 \text{ dan } P(0) = 0.$$

Solution

Check : $p(0) = 0$

$$P(1) = p(0^2+1) = (p(0))^2 + 1 = 1$$

$$P(2) = p(1^2+1) = (p(1))^2 + 1 = 2$$

$$P(5) = P(2^2+1) = (p(2))^2 + 1 = 5$$

$$P(26) = p(5^2+1) = (p(5))^2 + 1 = 26$$

Definisikan $x_0 = 0$

$$x_n = x_{n-1}^2 + 1$$

Dengan induksi dapat ditunjukkan $P(x_n) = x_n$.

Jadi polinomial $P(x)$ dan x bernilai sama untuk tak hingga bil. bulat

↓ Teorema identitas

$$P(x) = x$$

Jadi $\exists!$ polinomial $P(x)$, yaitu $P(x) = x$ ∎

Contoh 7

Misalkan x_1 dan x_2 akar² dari

$$x^2-(a+d)x+(ad-bc)=0.$$

Tunjukkan bahwa x_1^3 dan x_2^3 adalah akar² dari

$$y^2-(a^3+d^3+3abc+3bcd)y+(ad-bc)^3=0$$

LOCALLY ROOTED, GLOBALLY RESPECTED

UNIVERSITAS GADJAH MADA

Proof

Diketahui $x_1 + x_2 = a + d$

$x_1 x_2 = ad - bc$

$$(x_1 + x_2)^3 = x_1^3 + 3x_1^2 x_2 + 3x_1 x_2^2 + x_2^3$$

$$\Leftrightarrow x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2)$$

$$= (a+d)^3 - 3(ad-bc)(a+d)$$

$$= (a+d)\left[(a+d)^2 - 3(ad-bc)\right]$$

$$= (a+d)(a^2 - ad + d^2 + 3bc)$$

$$= a^3 + d^3 + 3abc + 3bcd$$

$$x_1^3 \cdot x_2^3 = (x_1 x_2)^3 = (ad-bc)^3$$

Dari Teorema Vieta, terbukti bahwa x_1^3 dan x_2^3 adalah akar² dari (*) ∎

Terima kasih …